ВСЕРОССИЙСКИЙ ЗАОЧНЫЙ ФИНАНСОВО-ЭКОНОМИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Кафедра экономико-математических методов и моделей

**КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА**

**по дисциплине «Экономико-математические методы и прикладные модели»**

**Вариант №6**

Выполнила:

Группа:

№зачетной книжки:

Руководитель:

Москва 2012

**Задача 1.6. Решить графическим методом типовую задачу оптимизации**

Финансовый консультант фирмы «АВС» консультирует клиента по оптимальному инвестиционному портфелю. Клиент хочет вложить средства (не более 25 000 долл.) в два наименования акций крупных предприятий в составе холдинга «Дикси».

Анализируются акций «Дикси- Е» и «Дикси- В». Цены на акции: «Дикси- Е» - 5 долл. за акцию; «Дикси- В» - 3 долл. за акцию

Клиент уточнил, что он хочет приобрести максимум 6000 акций обоих наименований, при этом акций одного из наименований должно быть не более 5000 штук.

По оценкам «АВС», прибыль от инвестиций в эти акции в следующем году составит: «Дикси- Е» - 1,1 долл.; «Дикси- В» - 0,9 долл.

Задача консультанта состоит в том, чтобы выдать клиенту рекомендации по оптимизации прибыли от инвестиций.

Построить ЭММ задачи, дать необходимые комментарии к ее элементам и получить решение графическим методом. Что произойдет, если решать задачу на минимум, и почему?

Решение:

Для удобства представим исходные данные в таблице:

Таблица . Исходные данные

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Вид дохода | Наименования акций | | Запас средств |
| **ДИКСИ-Е** | **ДИКСИ-В** |
| Стоимость 1 акции | **5** | **3** | 25000 |
| Прибыль от инвестиции акций в следующем году | **1,1** | **0,9** |  |
| Рекомендации | Х1 | Х2 |  |

Критерий «максимум».

* 1. Составим экономико-математическую модель задачи.

Пусть х1– кол-во акций «Дикси-Е», х2– кол-во акций «Дикси-В».

Х = (х1, х2) – т.е.оптимальная прибыль есть вектор с компонентами х1, х2. С учетом введенных обозначений, ЭММ задачи имеет вид:

ЦФ - Max f(Х) = 1,1\*х1+0,9\*х2

Ограничения: 5\*х1 + 3\*х2 ≤ 25000

х1 + х2 ≤ 6000

х1, х2 ≤ 5000

х1,х2 ≥ 0

* 1. Построим область допустимых решений (ОДР)(Рис. 1, выделена жирной линией (АВСДО)):

5\*х1 +3\*х2 = 25 000 (х1=5000, х2=0; х1=0, х2=8333,3)

х1 + х2 = 6000 (х1=6000,х2=0, х1=0, х2=6000)

х1 = 5000 (5000; 0) х2 = 5000 (0; 5000)

линию градиента (производную от 1,1\*х1+0,9\*х2) и линию уровня: max f(x) = 1,1Х1 + 0,9Х2, перпендикулярно линии градиента.

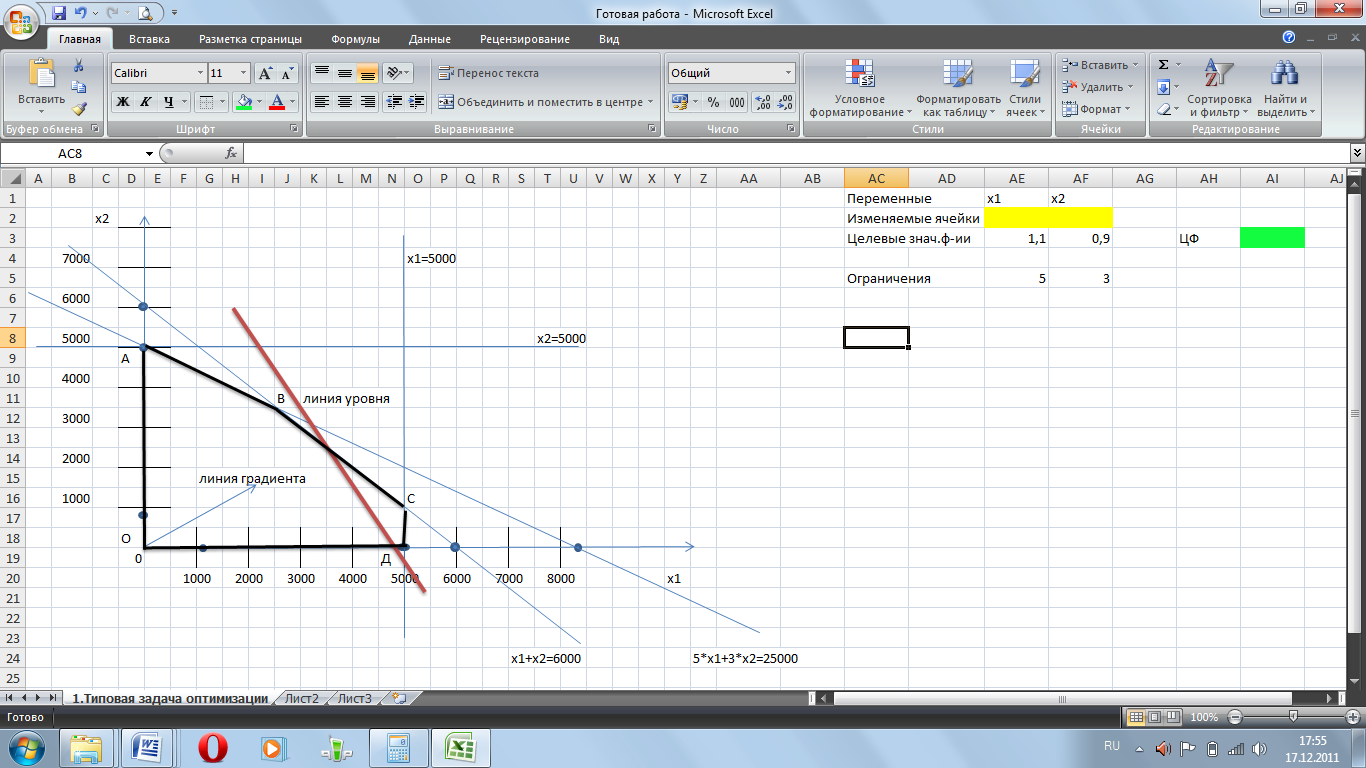


Рисунок . Построение ОДР

При перемещении линии уровня к максимальной точке ОДР, получим значение критерия «максимум»: х1=3500, х2=2500 (видно по рисунку), также вычислить методом Жордана-Гаусса:

5\*х1+3\*х2 = 25 000, 4\*х1+2\*х2=19000, 3\*х1+х2=13000,

х1+х2 = 6000; \*(-1) + х1+х2=6000; \*(-1) х1+х2 = 6000;

2х1=7000, х1=3500,

х1+х2=6000; х2=2500.

Данную ЗЛП также можно решить с помощью настройки «Поиск решения» в среде Excel, которая позволяет решать оптимизационные задачи.

Этап 1. Оформляем рабочий лист Excel, пишем комментарии (рис.2)

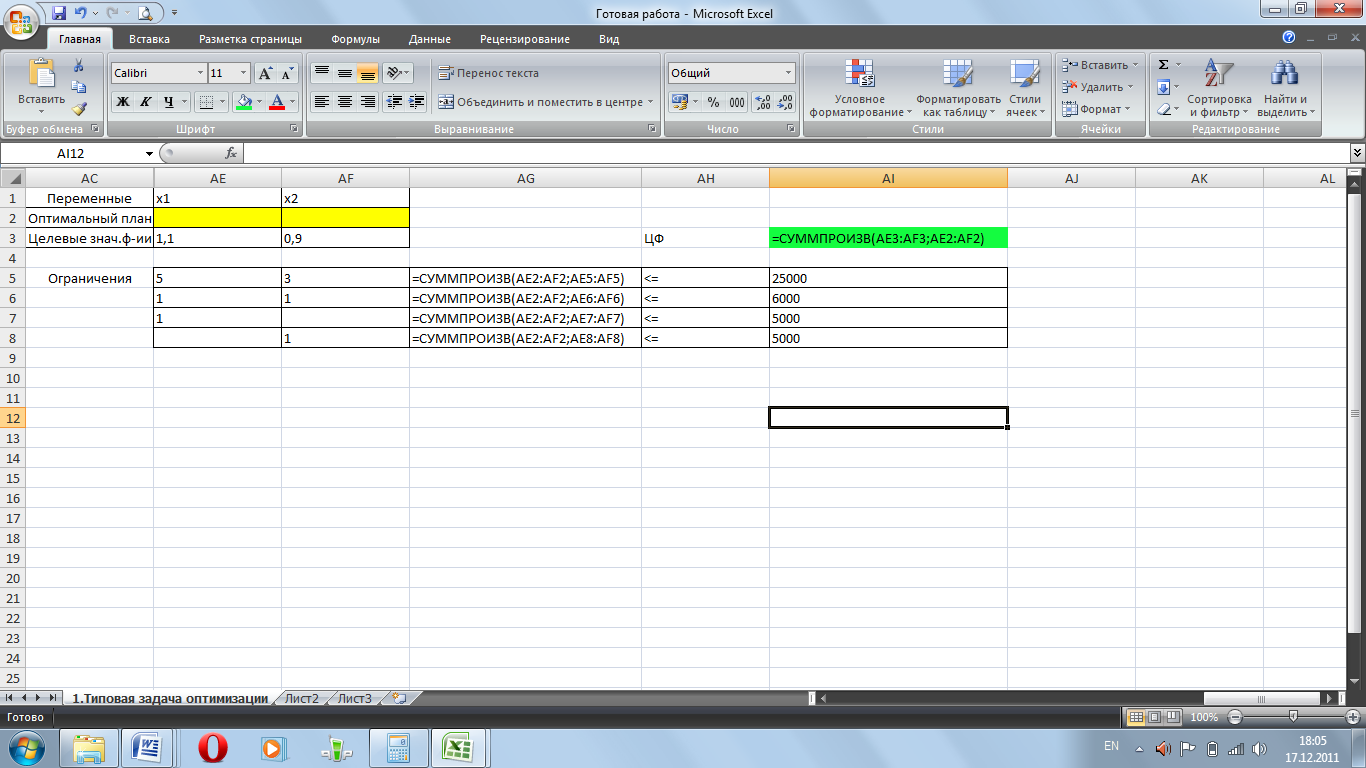


Рисунок . Оформление рабочего листа

Этап 2. Вызываем оптимизатор: Данные – Поиск Решений.

Оформляем диалоговое окно (рис.3), в «параметрах» ставим галочки «Линейная модель», «Неотрицательные значения».

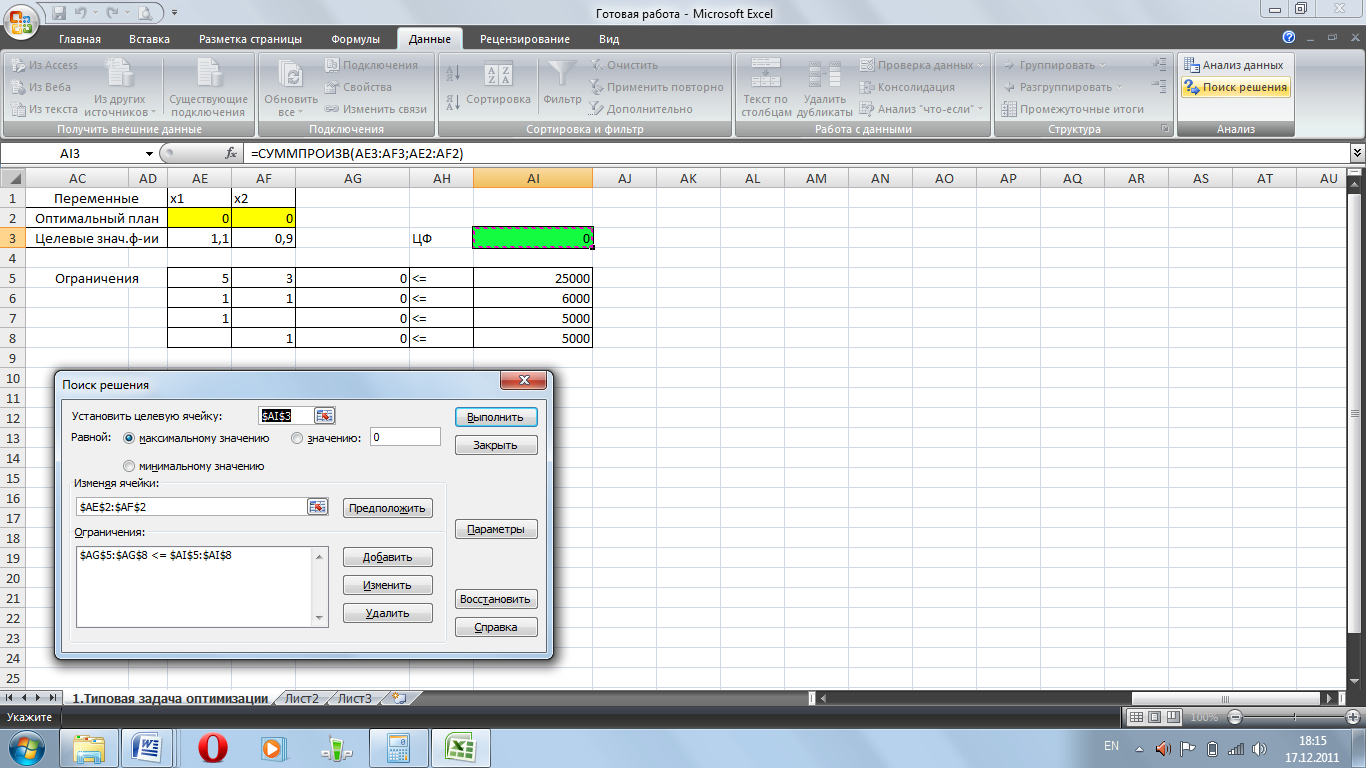


Рисунок . Оформление "Поиска решений"

Этап 3. Результаты поиска решений: Решение найдено (рис.4)

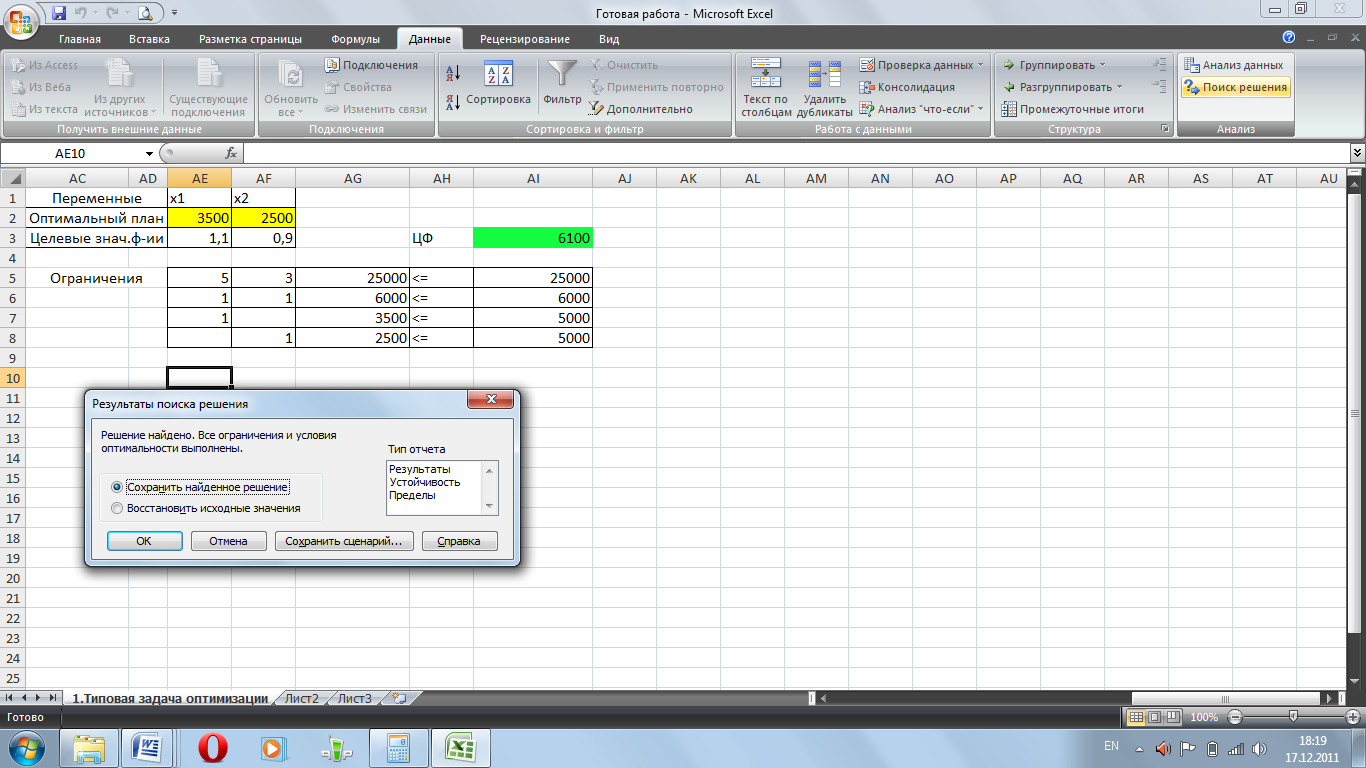


Рисунок . Результат поиска решений

Ответ: Для того, чтобы обеспечить максимум прибыли (6100 $), необходимо приобрести 3500 акций «Дикси -Е» и 2500 акций «Дикси -В».

Если задачу решать на min, то min f(Х) = 0 и достигается при х1 =0; х2 = 0.

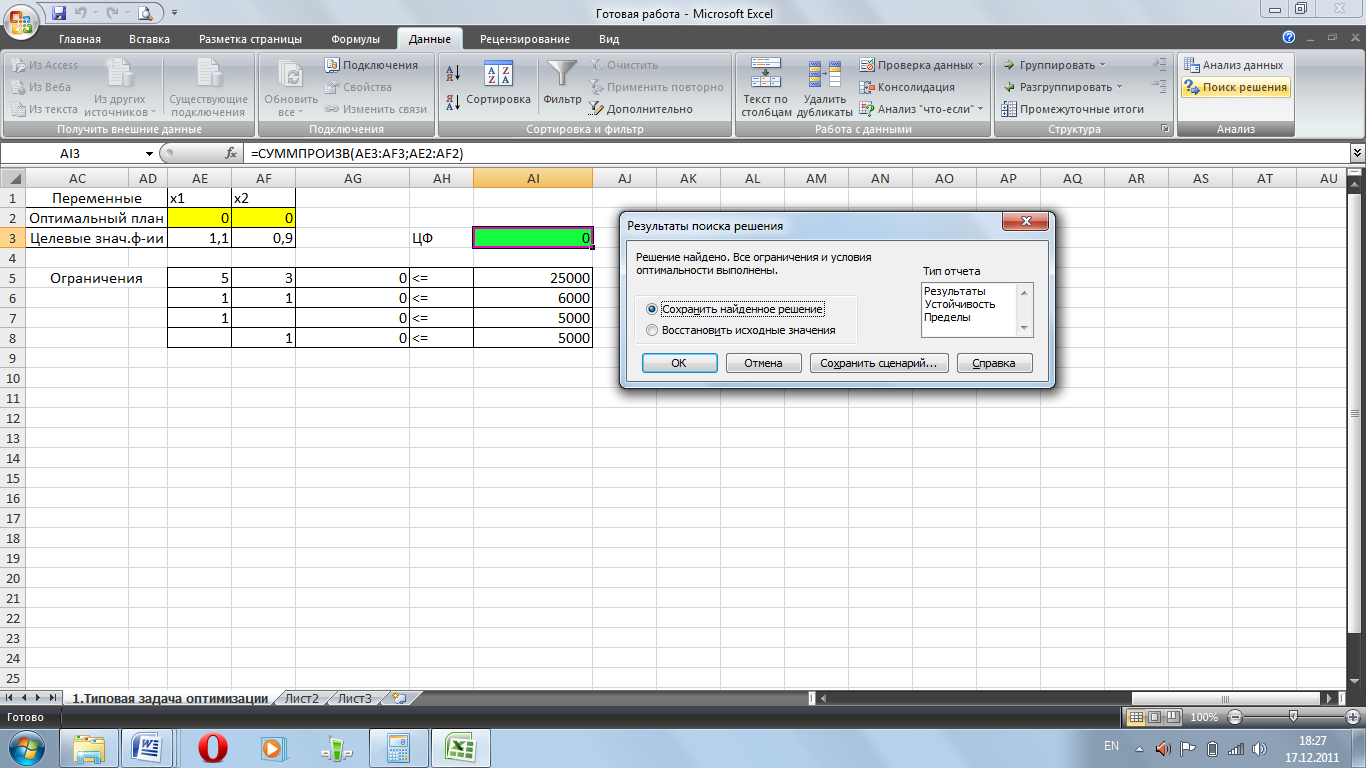


Рисунок . Результат поиска решений при критерии "минимум"

**Задача 2.6. Использовать аппарат теории двойственности для экономико-математического анализа оптимального плана задачи линейного программирования**

На основании информации, приведенной в таблице, решается задача оптимального использования ресурсов на максимум выручки от реализации готовой продукции.

Таблица . Исходные данные

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **Вид сырья** | **Нормы расхода сырья на ед. продукции** | | | **Запасы сырья** |
| **А** | **Б** | **В** |
| I  II  III | 18  6  5 | 15  4  3 | 12  8  3 | 360  192  180 |
| Цена изделия | 9 | 10 | 16 |  |

**Требуется:**

1. Сформулировать прямую оптимизационную задачу на максимум выручки от реализации готовой продукции, получить оптимальный план выпуска продукции.
2. Сформулировать двойственную задачу и найти ее оптимальный план с помощью теорем двойственности.
3. Пояснить нулевые значения переменных в оптимальном плане.
4. На основе свойств двойственных оценок и теорем двойственности:

* Проанализировать использование ресурсов в оптимальном плане исходной задачи;
* Определить, как изменятся выручка от реализации продукции и план ее выпуска, если запас сырья I вида увеличить на 45 кг., а II – уменьшить на 9 кг;
* Оценить целесообразность включения в план изделия Г ценой 11 единиц, на изготовление которого расходуется 9,4 и 6 кг. соответствующего вида сырья.

**Решение:**

1. Обозначим количество выпускаемых изделий А, Б, Всоответственно как *х*1, *х*2, *х*3. Число ограничений исходной задачи линейного программирования соответствует числу используемых для изготовления изделий типов сырья и равно 3. Зная цены изделий, нормы расхода сырья на их изготовление и запасы сырья, формулируем математическую модель исходной задачи линейного программирования:

max f(Х) = 9х1 + 10х2 + 16х3

18х1 + 15х2 + 12х3 ≤ 360

6х1 + 4х2 + 8х3 ≤ 192

5х1 + 3х2 + 3х3 ≤ 180

х1,2,3≥ 0

Найдем оптимальный план на получение максимальной выручки.

Решение задачи выполняется с помощью настройки «Поиск решения» в среде Excel. Этап 1. Оформляем рабочий лист (рис.6)

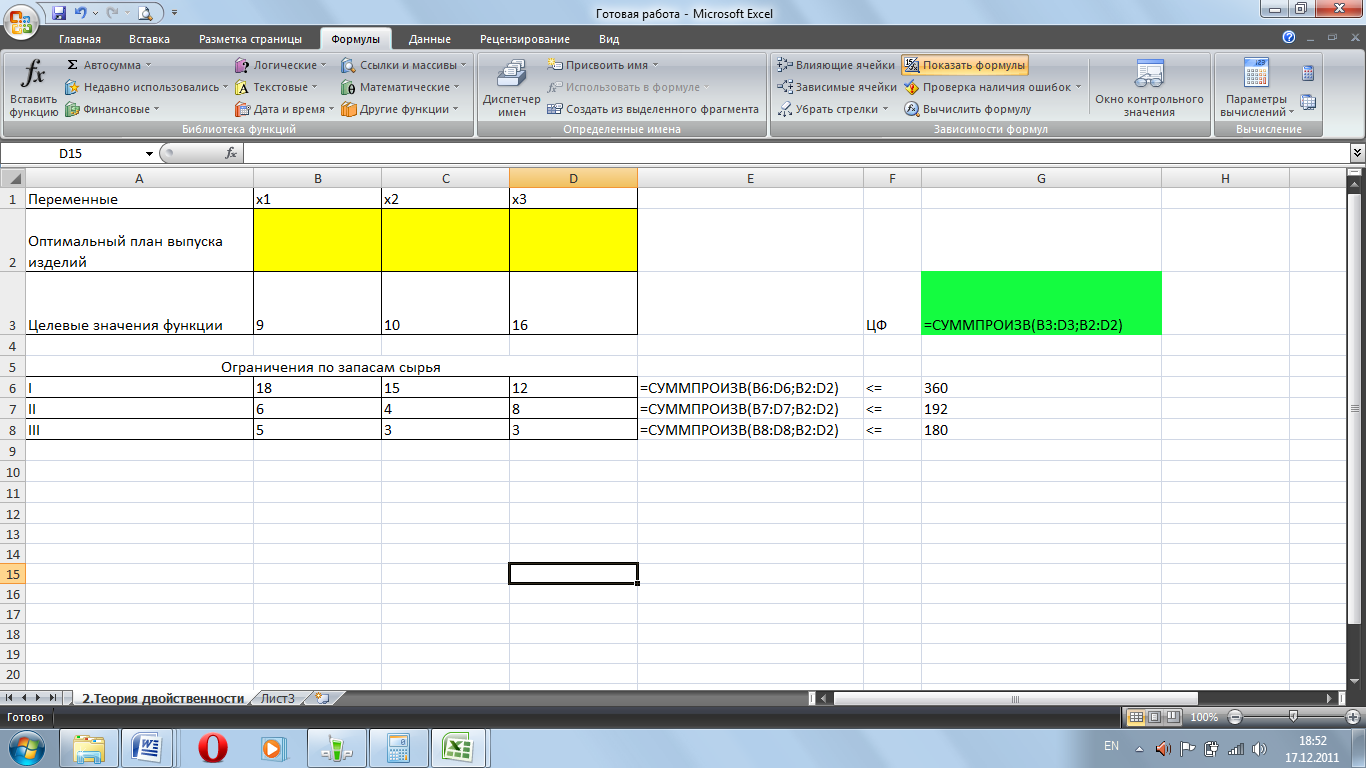


Рисунок . Оформление раб.листа.

Этап 2. Вызываем оптимизатор «Поиск решений», заполняем диалоговое окно (рис.7)

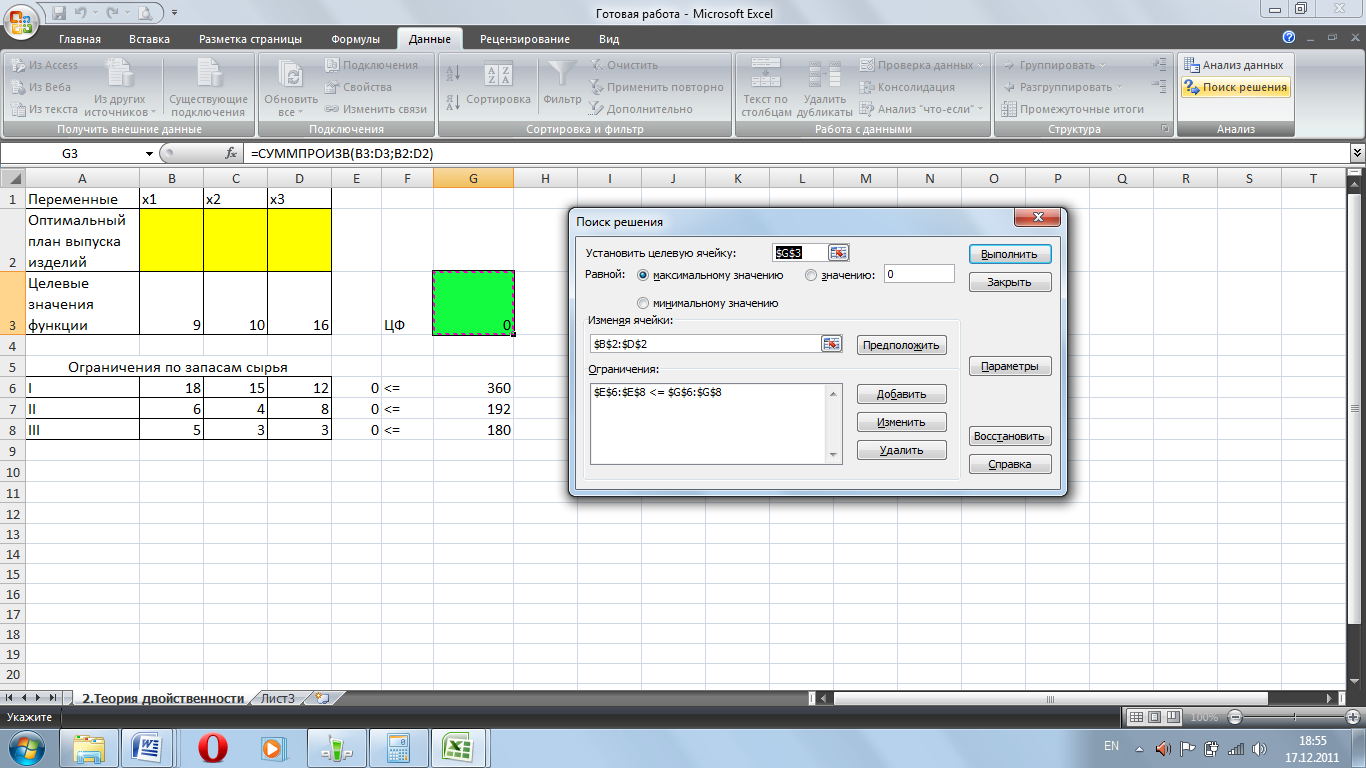


Рисунок . Оформление диалогового окна "Поиск решений"

Этап 3. Результаты поиска решений: Решение найдено (рис.8)

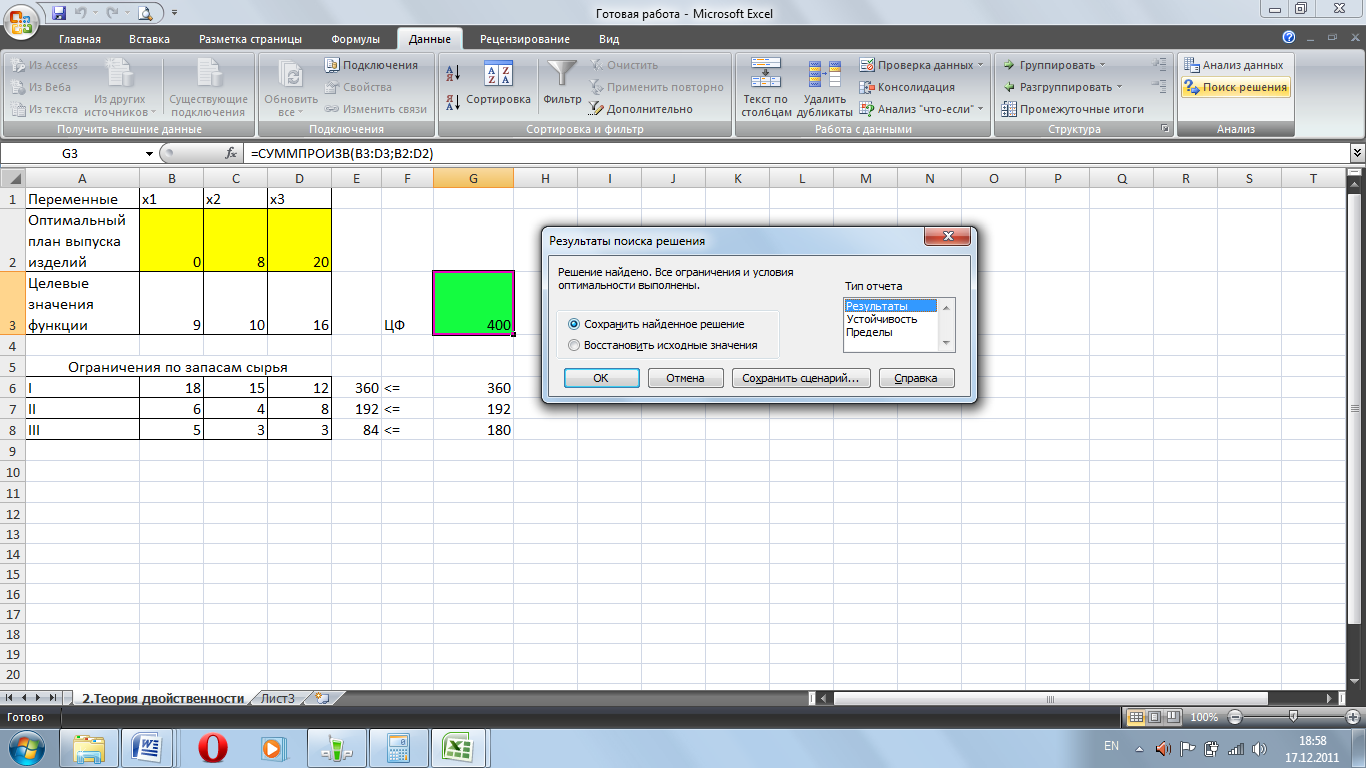


Рисунок . Результаты поиска решений.

Ответ. Максимальная выручка от реализации готовой продукции в размере 400 у.е. при заданных ограничениях в ресурсах на изготовление готовой продукции достигается при выпуске продукции вида А в количестве – 0 у.е., продукции вида Б – 8 у.е. и продукции вида В – 20 у.е. Это и будет являться оптимальным планом выпуска продукции.

2. Обозначим **двойственные оценки** ресурсов I, II, III соответственно как *y*1, *y*2, *y*3. Целевой функцией двойственной задачи является общая стоимость используемых ресурсов в двойственных оценках, которая должна быть наименьшей. Число ограничений двойственной задачи соответствует числу переменных исходной задачи и равно 3. Математическая модель двойственной задачи имеет вид:

min φ(у) = 360у1 + 192у2 + 180у3

18у1 + 6у2 +5у3 ≥ 9

15у1 + 4у2 +3у3 ≥ 10

12у1 + 8у2 +3у3 ≥ 16

У1,2,3 ≥ 0

Для нахождения оценок (у1,у2,у3) используем вторую теорему двойственности. Так как третье ограничение выполняется как строгое неравенство, то у3 =0. Так как Х2 >0 и Х3 >0,то

15у1 + 4у2 + 3у3 = 10

12у1 + 8у2 + 3у3 = 16

Для получения двойственных оценок имеем систему линейных уравнений:

у3 =0

15у1 + 4у2 = 10

12у1 + 8у2 = 16

т.е. у1 =2/9, у2 =5/3, у3 =0

Значение целевой функции равно:

min φ(у) = 360 \* 2/9 + 192 \* 5/3 + 180 \* 0 = 400, f(x) = φ(у) = 400

Это означает, что оптимальный план двойственной задачи определен верно.

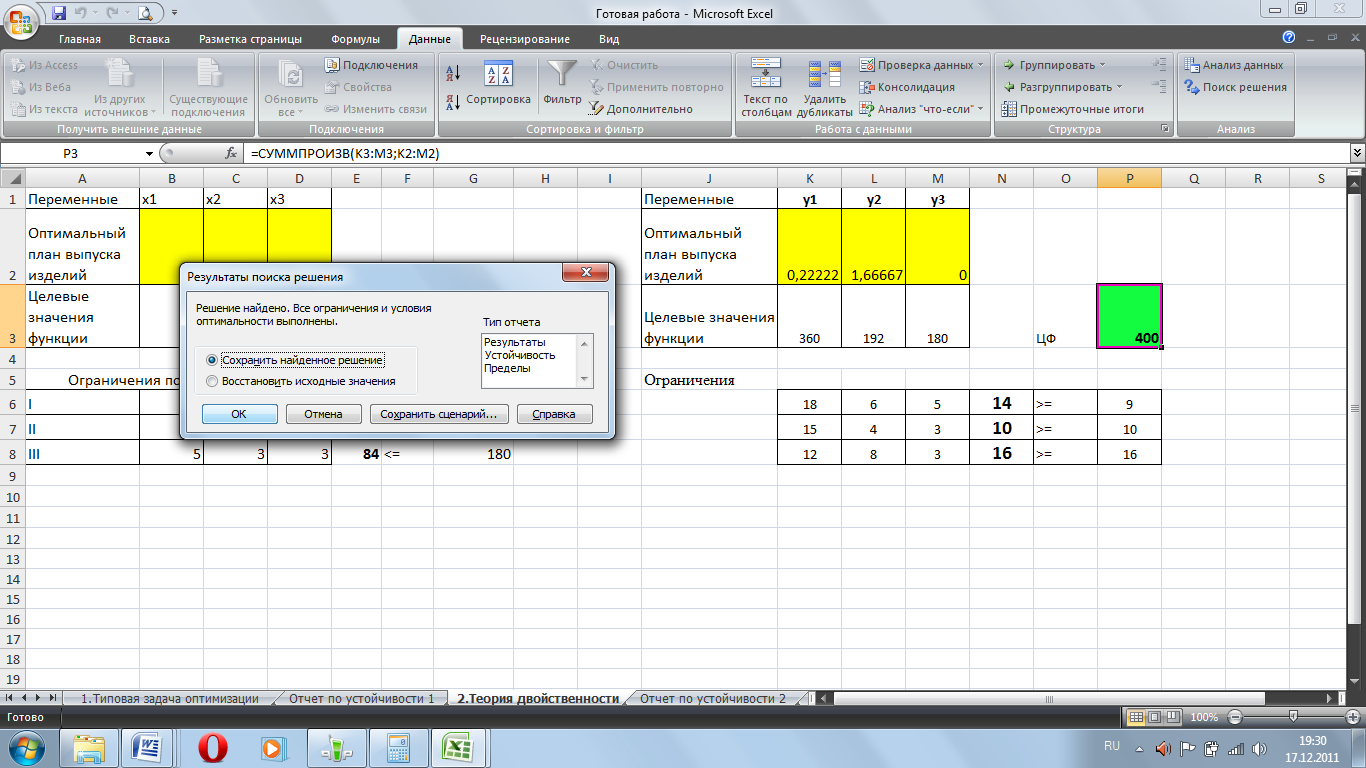


Рисунок . Результат поиска решения двойственной задачи

3. В оптимальном плане выпуска готовой продукции существуют нулевые значения переменных. Это говорит о том, что изделия типа А выпускать не нужно, а нулевое значение переменной в оптимальном плане двойственной задачи у3 = 0 говорит о том, что сырье третьего типа является не дефицитным и его запасы не повлияют на оптимальный план выпуска продукции.

4.1. Для анализа использования ресурсов в оптимальном плане воспользуемся «Отчетом по устойчивости»

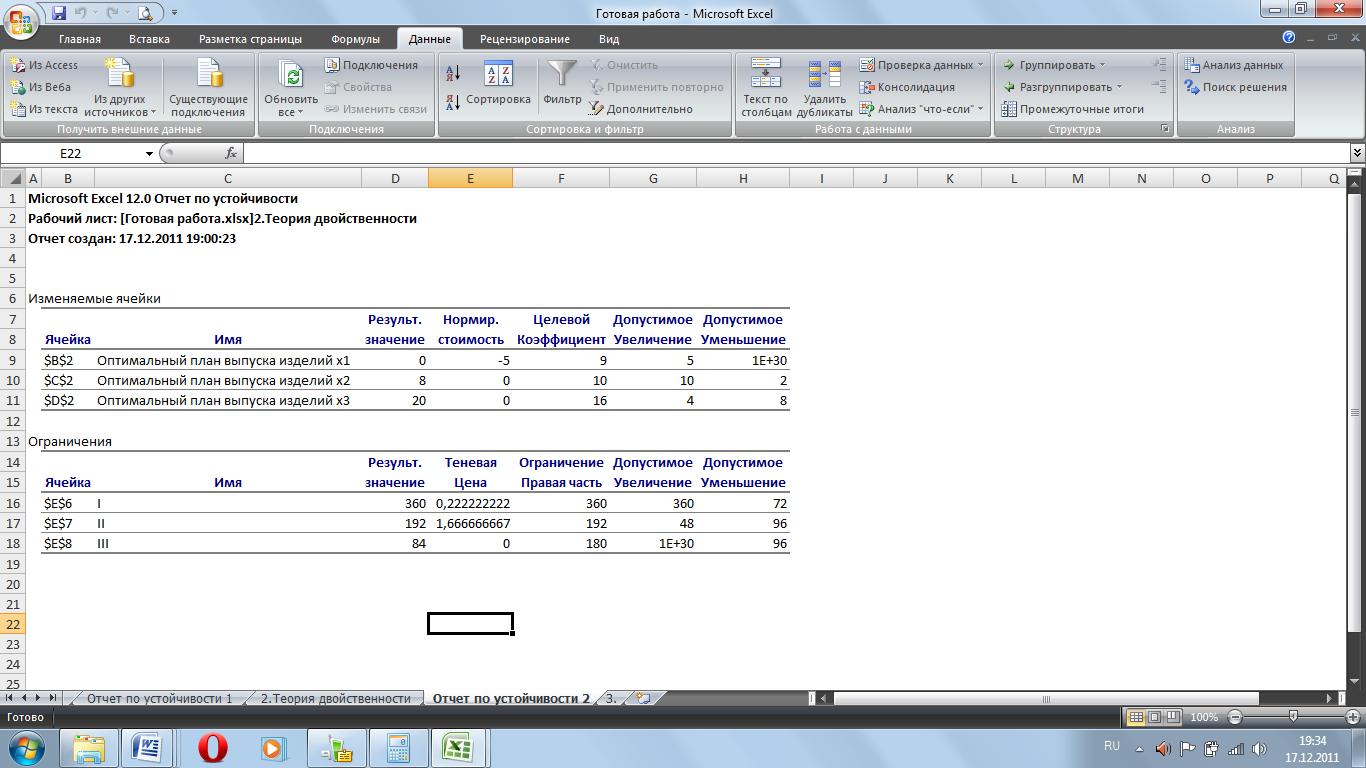


Рисунок . Отчет по устойчивости

Увеличение запасов сырья I вида на 1 единицу приведет к росту максимальной стоимости на 0,22 ед. (y1 =2/9); увеличение запасов сырья II вида на 1 ед. приведет к росту максимальной стоимости на 1,7 ед. (у2 =5/3), а увеличение запасов сырья III вида на 1 ед. не повлияет на оптимальный план выпуска продукции и на общую стоимость изделий (у2= 0).

4.2. Определим, как изменится выручка от реализации продукции и план ее выпуска, если запас сырья I вида увеличить на 45 кг, а II вида уменьшить на 9 кг :

f(Х)= 0,22\*45 – 1,66\*9 = -5,04, т.е.максимальная выручка уменьшится на 5,04 ед.

Определим изменение плана выпуска аз системы уравнений:



То есть оптимальный план выпуска будет иметь вид:

x1=0 x2=14,5 x3=15,62 max f(Х) = 394,6 (ден.ед)

4.3. Определим целесообразность включения в план изделия Г ценой 11 ед., на изготовление которого расходуется 9, 4 и 6 кг соответствующего вида сырья:

ΔГ = 9\*2/9 + 4\*5/3 + 6\*0 - 11 =  < 0 – следовательно, продукцию «Г» включать выгодно, так как она не поглощает дефицитных ресурсов, тем самым не сдерживает рост выпуска выгодной продукции.

**Задача 3.6. Используя балансовый метод планирования и модель Леонтьева, построить баланс производства и распределения продукции предприятий.**

Промышленная группа предприятий (холдинг) выпускает продукцию трех видов, при этом каждое из трех предприятий группы специализируется на выпуске продукции одного вида: первое предприятие специализируется на выпуске продукции первого вида, второе предприятие – продукции второго вила, третье предприятие – продукции третьего вида. Часть выпускаемой продукции потребляется предприятиями холдинга (идет на внутреннее потребление), остальная часть поставляется за его пределы (внешним потребителям, является конечным продуктом). Специалистами управляющей компании получены экономические оценки аij (i = 1,2,3; j = 1,2,3) элементов технологической матрицы А (норм расхода, коэффициентов прямых материальных затрат) и элементов уi  вектора конечной продукции Y.

Требуется:

1. Проверить продуктивность технологической матрицы А = (аij) (матрицы коэффициентов прямых материальных затрат).
2. Построить баланс (заполнить таблицу) производства и распределения продукции предприятий холдинга.

Решение:

Таблица . Исходные данные

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Отрасли | Коэффициенты прямых затрат, аij | | | Конечный продукт, Y |
| 1 | 2 | 3 |
| 1 | 0,3 | 0,4 | 0,1 | 200 |
| 2 | 0,1 | 0,2 | 0,4 | 300 |
| 3 | 0,3 | 0,4 | 0,1 | 200 |

1. Определим матрицу коэффициентов прямых затрат и объемов конечной продукции:

0,3 0,4 0,1 200

А = 0,1 0,2 0,4 , Y = 300

0,3 0,4 0,1 200

1. Решим данную задачу в среде Excel

Для определения общего (валового) выпуска продукции воспользуемся моделью Леонтьева в виде: Х=(Е-А)-1\*У, для этого определим матрицу-разность (Е-А) и с помощью функции =МОБР Мастера функций Excel найдем обратную матрицу В.(рис.11)

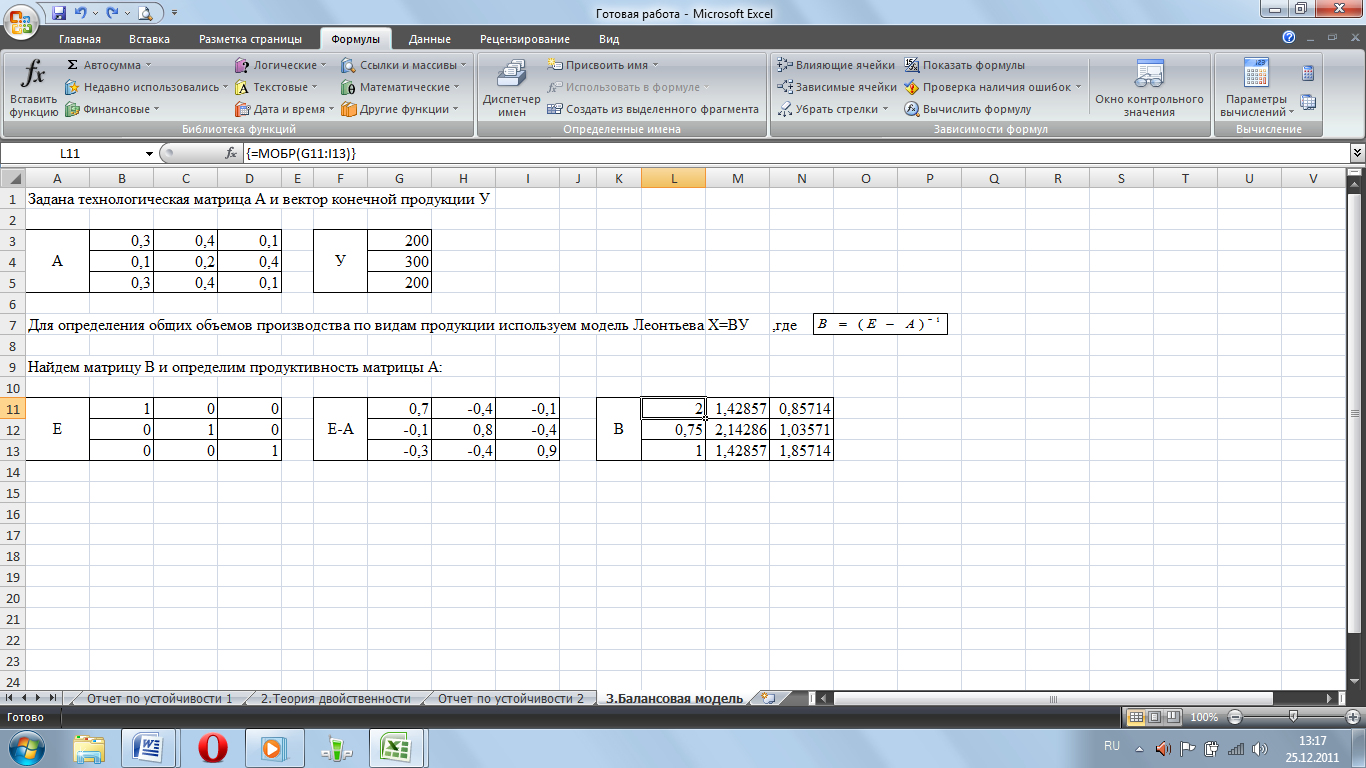


Рисунок . Результаты нахождения матрицы В

Т.к. матрица В не имеет отрицательных элементов, значит матрица А – продуктивна. Следовательно, мы можем найти матрицу-столбец объемов валовой продукции Х в соответствии с моделью Леонтьева с помощью функции =МУМНОЖ Мастера функций Excel. После этого мы найдем распределение продукции между цехами на внутреннее потребление из соотношения

Хi j = аij Хj и построим баланс производства и распределения продукции предприятия. (рис.12)

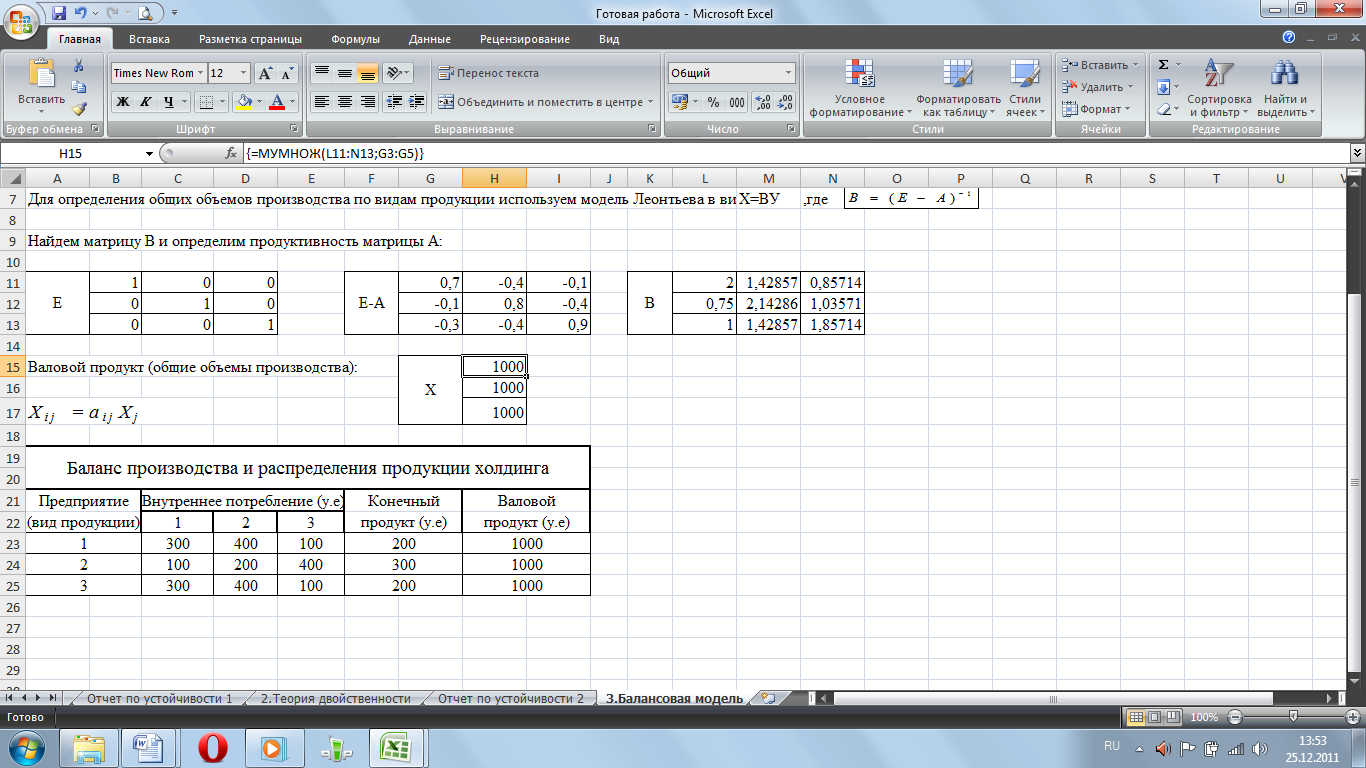


Рисунок . Результаты решения задачи

**4.6 Исследовать динамику экономического показателя на основе анализа одномерного временного ряда**

В течении девяти последовательных недель фиксировался спрос Y(t) (млн. руб.) на кредитные ресурсы финансовой компании. Временной ряд Y (t) этого показателя приведен в таблице:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| t | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| Y(t) | **12** | **15** | **16** | **19** | **17** | **20** | **24** | **25** | **28** |

Требуется:

1. Проверить наличие аномальных наблюдений.
2. Построить линейную модель Y (t) = a0 + a1t, параметры которой оценить МНК (Y (t)) – расчетные, смоделированные значения временного ряда).
3. Оценить адекватность построенных моделей, используя свойства независимости остаточной компоненты, случайности и соответствия нормальному закону распределения (при использовании R/S- критерия взять табулированные границы 2,7-3,7).
4. Оценить точность моделей на основе использования средней относительной ошибки аппроксимации.
5. По двум построенным моделям осуществить прогноз спроса на следующие две недели (доверительный интервал прогноза рассчитать при доверительной вероятности р =70%).
6. Фактические значения показателя, результаты моделирования и прогнозирования представить графически.

Вычисления провести с одним знаком в дробной части. Основные промежуточные результаты вычислений представить в таблицах.

**Решение:**

1. Оценим методом Ирвина наличие в ряду (уt факт) аномальных наблюдений, используя следующие формулы:

 , где 

1. Получим МНК-оценки параметров a0 и a1 линейной модели кривой роста (линейной трендовой модели): 

Для автоматизации расчетов используем программу **Регрессия** надстройки (статистического пакета) **Анализ данных** Excel (основное меню Данные/Анализ данных/ Регрессия). На рис.13 показано оформление окна диалога **Регрессия** указанной программы.

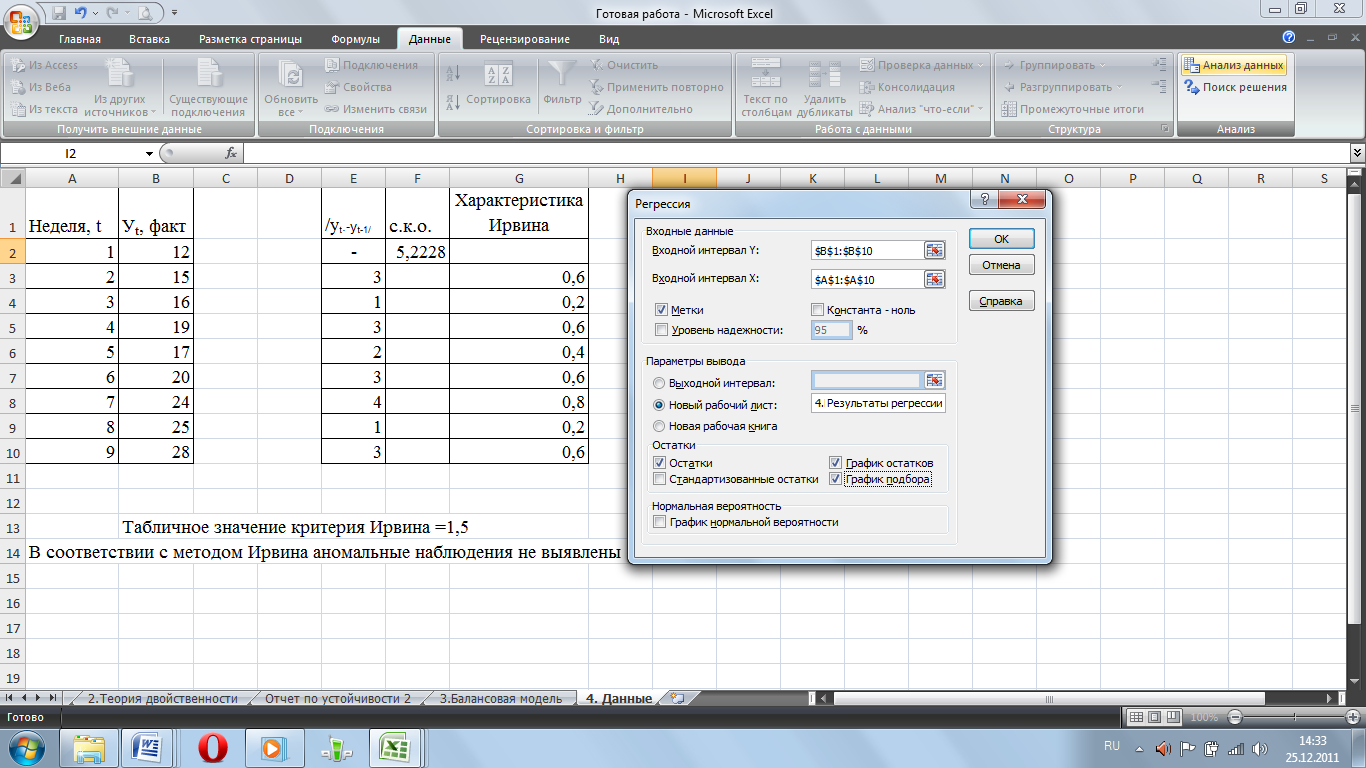


Рисунок . Применение метода Ирвина и оформление диалогового окна Регрессия

После выполнения команды ОК на лист «Результаты регрессии» выводятся итоги расчетов:

Таблица . Фрагмент резльтатов

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | *Коэффициенты* | *Стандартная ошибка* | *t-статистика* |
| Y-пересечение | 10,31 | 0,985152 | 10,46088 |
| Неделя, t | 1,85 | 0,175066 | 10,56744 |

Выделенные столбцы таблицы 4 содержат параметры модели, т.е. получена следующая модель кривой роста (трендовая модель):



1. Для оценки адекватности построенной модели исследуются свойства остаточной компоненты (остатков)  (*t* = 1, 2, … , *9*), т.е. расхождения уровней, рассчитанных по модели, и фактических наблюдений (Таблица 5).

Таблица . Остатки

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| ВЫВОД ОСТАТКА |  |  |
|  |  |  |
| *Наблюдение* | *Предсказанное Уt, факт* | *Остатки* |
| 1 | 12,16 | -0,16 |
| 2 | 14,01 | 0,99 |
| 3 | 15,86 | 0,14 |
| 4 | 17,71 | 1,29 |
| 5 | 19,56 | -2,56 |
| 6 | 21,41 | -1,41 |
| 7 | 23,26 | 0,74 |
| 8 | 25,11 | -0,11 |
| 9 | 26,96 | 1,04 |
|  | Сумма | 0,00 |

Рисунок . График остатков

1. С помощью функции =СРЗНАЧ убеждаемся, что для рассматриваемой линейной модели действительно = 0, так что гипотеза о равенстве математического ожидания значений ряда остатков нулю выполняется.
2. Проверку случайности уровней ряда остатков проведем на основе критерия поворотных точек. Количество поворотных точек в ряду остатков *р=6* (см. рис. 3), что больше 2. Свойство случайности остатков выполняется
3. При проверке свойства независимости оценивается наличие (отсутствие) автокорреляции в ряду остатков.Воспользуемся коэффициентом автокорреляции (первого порядка) и получим его значение с помощью функции Excel =КОРРЕЛ (в первый массив включаем остатки с первого по восьмой включительно, во второй массив – остатки со второго по девятый включительно):



Оценим его значимость с применением - критерия Стьюдента. Для этого рассчитаем значение - критерия по формуле:

=0,16.

Табличное значение  критерия Стьюдента с уровнем значимости =0,05 и =7 степенями свободы получим с помощью функции Excel =СТЬЮДРАСПОБР(0,05;7) = 2,36. Сравним его с расчетным значением - критерия (=0,16). Поскольку , то полученное значение коэффициента автокорреляции  незначимо и делаются вывод об отсутствии автокорреляции в ряду остатков, т.е. свойство независимости остатков выполняется.

1. Соответствие ряда остатков нормальному закону распределения проверим с помощью *R/S*-критерия , где =1,29 и = -2,56 соответственно максимальный и минимальный уровни ряда остатков; =1,27- среднеквадратическое отклонение в ряду остатков (вычисляем с помощью функции =СТАНДОТКЛОН).

Расчетное значение этого критерия попадает между табулированными границами (2,7—3,7) (для *n =* 9 и 5%-ного уровня значимости), то гипотеза о нормальном распределении ряда остатков принимается.

Построенная модель по всем критериям адекватна, т.е. адекватна в целом.

1. Для оценки точности модели определим среднюю относительную ошибку аппроксимации: .

Расчет по этой формуле удобно провести в Excel:

Таблица . Оценка точности

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Уt, факт | ABS ост | Е относ |
| 12 | 0,16 | 0,013 |
| 15 | 0,99 | 0,066 |
| 16 | 0,14 | 0,009 |
| 19 | 1,29 | 0,068 |
| 17 | 2,56 | 0,150 |
| 20 | 1,41 | 0,070 |
| 24 | 0,74 | 0,031 |
| 25 | 0,11 | 0,004 |
| 28 | 1,04 | 0,037 |
|  | Е отн | 5% |

Т.о., получена модель достаточно высокой точности (*Еотн* до 5-7%).

1. Осуществим на основе построенной модели прогноз спроса на две недели вперед (доверительная вероятность - 70%).

Точечный прогноз прогноз(*n+ к*)на *к* – шагов вперед получается путем подстановки в модель соответствующего значения фактора времени, т.е. *t*= *n*+*k* (для рассматриваемой задачи *к=1, к=2)*:

 прогноз (*n+1*) = 10,31+1,85 *t* = 10,31+1,85\*10 = 28,81,

 прогноз (*n+2*) = 10,31+1,85 *t* = 10,31+1,85\*11 = 30,66.

Для построения интервального прогноза определяем ширину доверительного интервала по формуле:

,

где - стандартная ошибка модели (среднеквадратическое отклонение от тренда, см. вывод итогов на листе **Результаты регрессии**):

 .

Коэффициент **=СТЬЮДРАСПОБР(0,3;7) = 1,12 является табличным значениемt-статистики Стьюдента при заданном уровне значимости 0,3 (доверительной вероятности 70%) и числе степеней свободы (*n* – 2)=7.

Итак: ,

.

Все данные прогноза представлены на рис. 15:

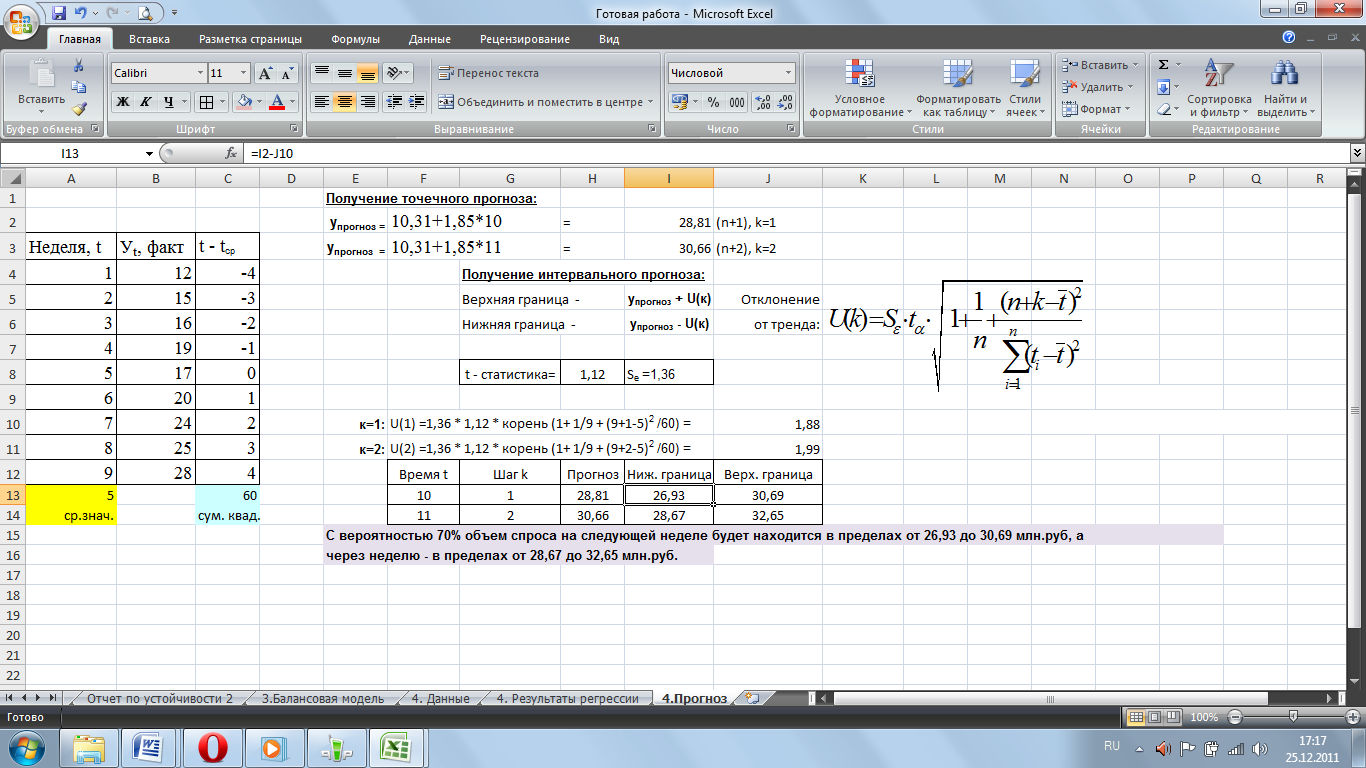


Рисунок . Данные прогноза на следующие две недели

Представим графически результаты моделирования и прогнозирования.

Это удобно сделать путем доработки **Графика подбора**, полученного при выводе итогов работы программы **Регрессия** на лист **Результаты регрессии** (рис. 4).

1. Представим графически результаты моделирования и прогнозирования. Это удобно сделать путем доработки **Графика подбора**, полученного при выводе итогов работы программы **Регрессия** на лист **Результаты регрессии** (рис. 16).

Т.о. с вероятностью 70% объем спроса на следующей неделе будет находится в пределах от 26,93 до 30,69 млн. руб., а через месяц - в пределах от 28,67 до 32,65 млн.руб.

Рисунок . Графическое представление результатов моделирования и прогнозирования

Рисунок . Линии тренда ВР: полиномиальная и степенная